Section B (programme T)

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Une fonction f réelle, de variable réelle, intégrable sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, étant donnée, on lui associe la fonction g définie par :

$$g(x) = \int_0^1 f(x+t)\ dt.$$

On désigne par T l'application faisant correspondre la fonction g à la fonction f. Le problème propose l'étude de quelques propriétés de l'application T.

On note $\mathfrak{P}$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et $\mathfrak{P}_n$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n (n entier donné > 0), sous-espace du précédent.

PREMIÈRE PARTIE

Dans cette partie, on étudie les restrictions de l'application T à l'espace $\mathfrak{P}$ et aux espaces $\mathfrak{P}_n$. Ces restrictions sont toujours notées T.

1° *a.* Montrer que T est un endomorphisme de $\mathfrak{P}$ et que $T(\mathfrak{P}_n) \subset \mathfrak{P}_n$.

b. Déterminer l'image matricielle de T relativement à la base canonique de $\mathfrak{P}_n$. Quelles sont les valeurs propres de la restriction de T à $\mathfrak{P}_n$? Cette restriction est-elle diagonalisable?

c. Montrer que $T(\mathfrak{P}_n) = \mathfrak{P}_n$.

d. Déterminer le noyau de T dans $\mathfrak{P}$. Peut-on en conclure que $T(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}$?

2° Soit Q l'image par T d'un polynôme P de degré inférieur ou égal à n.

a. Déterminer un développement de $Q(x)$ faisant intervenir les dérivées successives de P au point x de $\mathbb{R}$.

b. Q étant un polynôme de degré $\leqslant n$ supposé donné, déterminer $P(x)$, son antécédent par T, sous forme d'un déterminant faisant intervenir dans une de ses colonnes les dérivées successives de Q au point x.

c. Déterminer P tel que $TP = Q$ avec $Q(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5$.

DEUXIÈME PARTIE

1° On désigne par E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont continues.

a. Soit $f \in E$, montrer que $g = Tf$ est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée g' en utilisant f. g est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

b. T étant considérée comme application linéaire de E dans E, déterminer une condition nécessaire et suffisante, faisant intervenir une primitive de f, pour que cette fonction f de E appartienne au noyau de T.

En utilisant le fait qu'un polynôme, s'il n'est pas réduit à une constante, n'est pas borné sur $\mathbb{R}$, retrouver le résultat obtenu dans I. 1° *d*. Donner des exemples simples de fonctions de E appartenant au noyau de T. Montrer que ce noyau n'est pas de dimension finie.

c. Montrer que les fonctions propres de T (c'est-à-dire les vecteurs propres de T) dans E, s'il en existe, sont des solutions de certaines équations fonctionnelles que l'on formera. En utilisant les fonctions : $x \rightsquigarrow e^{\lambda x}$ où λ est réel différent de 0, montrer qu'il existe des fonctions propres et que tout réel de l'ensemble $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ est une valeur propre. Existe-t-il des fonctions propres de T qui soient de la forme $x \rightsquigarrow A \cos ax + B \sin ax$ où A, B, a sont des réels?

2° On suppose maintenant f discontinue en certains points de $\mathbb{R}$.

a. Étude de quelques exemples :

Calculer Tf pour les fonctions suivantes :

$$f_1 : \begin{cases} f_1(x) = x + 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ f_1(x) = x - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$f_2 : \quad f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}} \quad \text{si } x \neq 0$$

$$f_3 : \quad f_3(x) = \frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0$$

Dans chacun des cas, on déterminera les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de Tf.

b. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R} - \{x_0\}$ telle que si ε est un nombre strictement positif arbitraire les intégrales

$$\int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0} f(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_{x_0}^{x_0 + \varepsilon} f(t)\,dt$$

existent.

Montrer que $Tf = g$ est continue sur $\mathbb{R}$. Étudier la dérivabilité de g sur $\mathbb{R}$.

c. Déterminer les domaines de continuité et de dérivabilité de $Tf = g$ lorsque f est continue sur $\mathbb{R} - \{x_0\}$ et que les deux intégrales

$$\int_{x_0}^{x_0 + \varepsilon} f(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0} f(t)\,dt$$

sont toutes deux divergentes.

3° On suppose $f \in E$ et on se propose d'étudier l'existence de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Tf(t)\,dt.$$

a. On considère d'abord l'exemple suivant où α est un nombre strictement positif donné

$$\begin{cases} f(t) = \dfrac{1}{|t|^{\alpha}} & \text{si } |t| > 1 \\ f(t) = 1 & \text{si } |t| \leqslant 1 \end{cases}$$

L'intégrale précédente existe-t-elle? Dans l'affirmative calculer Tf.

b. On suppose $f \in E$ et en outre l'existence de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx.$$

Montrer que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Tf(t)\,dt$$

existe. (On pourra, par exemple, étudier la condition nécessaire et suffisante de convergence de Cauchy et, pour cela, interpréter l'intégrale

$$\int_{T}^{T'} \left(\int_{x}^{x+1} f(t)\,dt \right) dx$$

comme une intégrale double.)

c. On suppose

$$f \in E, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Montrer que les deux intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} Tf(t)\,dt$$

sont de même nature.

4° En supposant encore $f \in E$, on se propose d'étudier les suites et les séries de termes généraux $Tf(n) = g(n)$.

a. Montrer que si $\lim_{t \to \infty} f(t) = 0$ alors $\lim_{\substack{n \to \infty \\ n \in \mathbb{N}}} g(n) = 0$. La même conclusion serait-elle obtenue si l'on avait supposé $\lim_{\substack{n \to +\infty \\ n \in \mathbb{N}}} f(n) = 0$?

b. On suppose $\lim_{t \to \infty} f(t) = a \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \to \infty} g(n)$ existe-t-elle ? Quelle est cette limite si elle existe ?

c. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la série de terme général $g(n)$ soit convergente. Si cette condition est vérifiée, quelle est nécessairement la somme de cette série?

d. On suppose que la série $\sum_{0}^{\infty} f(n)$ est convergente avec f positive et décroissante sur $[0, +\infty[$. Montrer que la série $\sum_{0}^{\infty} g(n)$ est convergente.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail